平成 29 年度 物質情報学 1 追加課題　　出題：谷村省吾　　平成 29 年 7 月 28 日

平成 29 年度の物質情報学 1 の履修者のうち，平成 29 年 7 月 28 日の試験を受験しなかった者，または，これまでの実績だけでは不合格判定される者のみが，この課題の解答を提出して成績判定に考慮される資格がある．試験の成績に関する問い合わせには応じない．他人の解答の丸写しと見られる解答レポートは，写した方も写された方も 0 点とする．満点を取ろうとすることも大事だが，自分の実力を正直に測ることの方が大事だと考えよ．
本課題解答の提出期限は平成 29 年 8 月 4 日（金）17 時．提出先は情報科学棟 717 号室のドアポケット．

[1] x, y は t を変数とする関数 $x(t), y(t)$ である．その導関数を $\dfrac{dx}{dt} = \dot{x},\ \dfrac{dy}{dt} = \dot{y},\ \dfrac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x},\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}$ と書く．a, b, c は定数とする．$f(x)$ や $g(x, y)$ は微分可能な関数とする．以下の式を計算せよ．

(1) $\dfrac{\partial}{\partial x}\big(ax^2 + bx + c\big)^3$　　(2) $\dfrac{\partial}{\partial x}\Big\{(3x+1)^2(5x^2-3)^4\Big\}$

(3) $\dfrac{\partial}{\partial y}\Big(e^{2xy}\sin(3xy)\Big)$　　(4) $\dfrac{d}{dt}\big(ax^2 + bxy + cy^2\big)$

(5) $\dfrac{\partial}{\partial x}\big(x^3\,\dot{x}^2\big)$　　(6) $\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}}\big(x^3\,\dot{x}^2\big)$

(7) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}}\big(x^3\,\dot{x}^2\big)$　　(8) $\dfrac{d}{dt}f(x)$

(9) $\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}}\Big(\dfrac{d}{dt}f(x)\Big)^2$　　(10) $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \dot{x}}\Big(\dfrac{d}{dt}f(x)\Big)^2$

(11) $\dfrac{d}{dt}\big(x\sin at\big)$　　(12) $\dfrac{d}{dt}g(x, y)$

[2] (x, y, z) を 3 次元空間の直交座標とする．空間中の力の場 $\boldsymbol{F} = (F_x(x,y,z), F_y(x,y,z), F_z(x,y,z))$ に対して関数 $U(x, y, z)$ で

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

をいっぺんに満たすものがあれば，関数 U を位置エネルギーと呼び，$\boldsymbol{F}$ は保存力場であるという．与えられた力の場に対して位置エネルギーは一意的ではなく，任意の定数 C に対して $\tilde{U}(x, y, z) = U(x, y, z) + C$ とおいたものも位置エネルギーになり得る．以下の問に答えよ．

(1) $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ が保存力場ならば

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0$$

が成り立つことを示せ．

(2) 力の場 $\boldsymbol{F}$ が以下のような (x, y, z) の関数として与えられている．$\boldsymbol{F}$ が保存力場だと思われるなら，それに対応する位置エネルギー U を求めよ（保存力場であることの証明は書かなくてもよい）．保存力場でないと思われるなら，保存力場でないことを証明せよ．

(i) $F_x = 4x^3y^3z^6, \quad F_y = 3x^4y^2z^6, \quad F_z = 6x^4y^3z^5$

(ii) $F_x = x, \quad F_y = y^2, \quad F_z = z^3$

(iii) $F_x = y, \quad F_y = x, \quad F_z = 1$

(iv) $F_x = y, \quad F_y = -x + z, \quad F_z = y$

[**3**] 傾斜角 α の斜面上を動く質点の座標 (x, y) は独立変数 q を使って

$$\begin{cases} x = q\cos\alpha, \\ y = -q\sin\alpha, \end{cases}$$

と表すことができる．このとき，ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

を変数 q を用いて書き換えよ．変数 q に対するオイラー・ラグランジュ方程式を導け．その方程式の初期値問題を解け．つまり，任意の時刻 t における $q(t)$ を $q(0)$, $\dot{q}(0)$, t の式で表せ．

[**4**] 水平線を x 軸とし，上向きの鉛直線を y 軸とする．関数 $y = f(x)$ のグラフで表される曲がった線上を滑って動く質点を考える．ラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

から変数 y を消去して独立変数 x だけで書き換えよ．また，そのラグランジアンから変数 x に対するオイラー・ラグランジュ方程式を書き下せ．

[**5**] a, b, c, d を定数として（$a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ とする），変数 (x, y, z) についての拘束条件

$$\varPhi(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$$

の下で関数

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

の値が最小になるような (x, y, z) を求めよ．また，拘束条件の下での F の最小値を求めよ．

[**6**] (1) ω は 0 でない定数とする．関数 $f(t)$ についての微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dt^2} = -\omega^2 f(t)$$

の初期値問題を解け．つまり，任意の時刻 t における $f(t)$ を $f(0)$, $\dot{f}(0)$, t の式で表せ．

(2) ω は 0 でない定数とする．2 つの関数 $f(t), g(t)$ についての連立微分方程式

$$\frac{df}{dt} = -\omega g(t), \qquad \frac{dg}{dt} = \omega f(t)$$

の初期値問題を解け．つまり，任意の時刻 t における $f(t), g(t)$ を $f(0)$, $g(0)$, t の式で表せ．

[**7**] 変数 x, y で記述される質点が次のラグランジアンに従うとする．ただし，m, e は正の定数である．以下の問に答えよ．

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{1}{2}e(x\dot{y} - y\dot{x})$$

(1) 変数 x, y に対するオイラー・ラグランジュ方程式をそれぞれ書き下せ．

(2) オイラー・ラグランジュ方程式の初期値問題を解け．

(3) 時間に依存しない実数パラメータ ε を用いた変換

$$x \mapsto \tilde{x} = x\cos\varepsilon - y\sin\varepsilon, \qquad y \mapsto \tilde{y} = x\sin\varepsilon + y\cos\varepsilon$$

の下で L が不変であることを示せ.

(4) この不変性に伴うネーター保存量 G を求めよ.

(5) 極座標 (r, ϕ) を

$$x = r\cos\phi, \qquad y = r\sin\phi$$

で導入する．ラグランジアンを $(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$ の関数として書き表せ.

(6) 変数 r に対するオイラー・ラグランジュ方程式を書き下せ.

(7) 変数 ϕ に対するオイラー・ラグランジュ方程式を書き下せ.

(8) (4) で求めた G を $(r, \phi, \dot{r}, \dot{\phi})$ の関数に書き換えよ.

[**8**] 変数 x, y, z で記述される質点がラグランジアン

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + k\cos(y - z)$$

に従うとする．ただし，m, k は正の定数である．このラグランジアンの対称性を述べて，独立なネーター保存量を 2 つ見つけよ.

[**9**] 一定の重力加速度 g の下で 1 次元方向に運動する質量 m の質点の運動を考える．質点の高さを q とすると，この系のラグランジアンは

$$L = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - mgq$$

である．以下の問に答えよ.

(1) q に共役な正準運動量 $p = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}}$ を求め，ハミルトニアン $H(q, p) = p\dot{q} - L$ を求めよ.

(2) 正準運動方程式 $\dot{q} = \dfrac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = -\dfrac{\partial H}{\partial q}$ を具体的に書き下せ.

(3) ハミルトニアン $H(q, p)$ と定数 E が与えられたとき，$H(q, p) = E$ を満たす点 (q, p) の集合を等エネルギー面という．E の値ごとに等エネルギー面が定まるが，E の値を $E_1, E_2, \cdots$ というぐあいにいろいろ変えてできる多数の等エネルギー面の集合を**等エネルギー面の族**という．q を横軸，p を縦軸とする座標平面に (1) で求めたハミルトニアンに対する等エネルギー面の族の概形を描け．とくに $E > 0$, $E = 0$, $E < 0$ の違いがわかるように描け.

(4) q を横軸，p を縦軸とする座標平面にハミルトンベクトル場と相流を描け.

〔問題終り〕